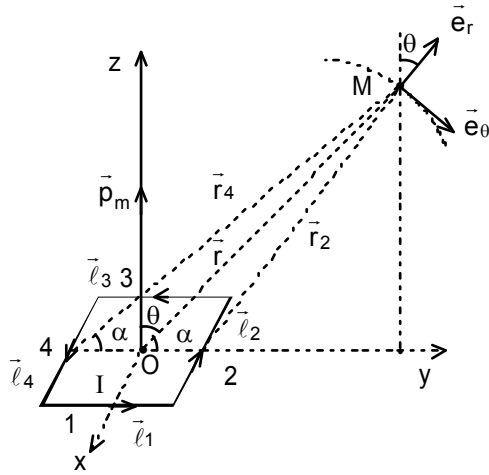


Manyetik dipolün manyetik alanı

Fizikte maddenin içyapısını izah etmek için dipol etkileşimleri çok önemlidir. Zira atom ve moleküllerin yüklerin ya da hareketli yüklerden oluşan sistemlerde süperpozisyon sonucu kuvvetin karesi ile ters orantılı kuvvetlerin dışında kuvvetler etki edip daha yüksek mertebeden etkiler oluşturmaktadır. Elektrik dipolün elektrik alanının bulunması genelde daha kolaydır. Manyetik dipolün oluşturduğu manyetik alanını bulmak ise genelde vektör potansiyel kavramı bilmeyi gerektirir. Buna rağmen manyetik dipolün manyetik alanının temel fizik yasaları ve kavramları kullanılarak bulunması mümkündür. Burada kullanılan yöntem ve teknikler fizik olimpiyatı çalışmalarında tatbik edilmiştir.



Kenar uzunluğu ℓ olan kare şeklinde bir çerçeveden geçen akımın çerçeveden çok çok uzakta oluşturduğu manyetik indüksiyon alanı bulabiliriz. Çerçevenin \vec{p}_m manyetik dipol momentini z eksenine boyunca olsun. Bunun için çerçevenin O merkezinden geçen ve çerçevenin düzlemine dik olan z eksenine θ açısı yapan ve r uzaklıkta bulunan bir M noktası ele alalım. M noktasından geçen ve çerçevenin düzlemine geçirilen izdüşümü çerçevenin düzleminde bulunan ve kenarların ortasından geçen kenara dik olan y eksenindedir. Kare şeklindeki çerçevenin M noktasındaki radyal ve teğetsel bileşenleri bulmak için manyetik indüksiyon alanının vektörel şekli ile çalışmalıyız. $r \gg \ell$ uzaklıkları için çerçevenin şekli

artık önemli değildir. \vec{p}_m manyetik dipol momentini z eksenine boyunca olup

$$\vec{p}_m = IS\vec{k} = I\ell^2\vec{k}$$

şeklinde. Burada \vec{k} , z eksenine boyunca olan birim vektördür. I akım teli üzerinde seçilen küçük $d\ell$ uzunluğundaki bir tel parçasının r uzaklıktaki $d\vec{B}$ manyetik indüksiyon alanı Biot-Savart- yasası ile

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$$

şeklinde verilmektedir. Çerçevenin kenarları vektör olarak yazılabilir- $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$. Bu vektörler için

$$\vec{\ell}_1 = -\vec{\ell}_3; \vec{\ell}_2 = -\vec{\ell}_4$$

oluşturdukları alan için

$$\vec{S} = S\vec{k} = \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \vec{\ell}_2 \times \vec{\ell}_3 = \vec{\ell}_3 \times \vec{\ell}_4 = \vec{\ell}_4 \times \vec{\ell}_1 = \ell^2\vec{k}$$

yazabiliriz. Çerçevenin kenarların orta noktalarından M noktasına doğru geçirilen uzaklıklar için $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ ve \vec{r}_4 olsun. Bu vektörler arasındaki bağlantı için

$$\vec{\ell}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_4; \vec{\ell}_3 + \vec{r}_4 = \vec{r}_2$$

$$\vec{\ell}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1; \vec{\ell}_4 + \vec{r}_1 = \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_3 \approx 2\vec{r}; \vec{r}_2 + \vec{r}_4 \approx 2\vec{r}$$

yazabiliriz. Şekilde, $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4, \vec{r}_2$ ve \vec{r}_4 vektörleri gösterilmiştir. Çerçevdeki tüm kenarların orta noktalarından M noktasına doğru geçirilen uzaklıklar için

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_1}{r_1^3}; \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_2}{r_2^3}; \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{\ell}_3 \times \vec{r}_3}{r_3^3}; \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{\ell}_4 \times \vec{r}_4}{r_4^3}$$

yazabiliriz. Çerçevenin geometrik O merkezi ile M noktası arasındaki uzaklık r olsun. Çerçevenin 1. ve 3. No'lu kenarlarından M noktasına doğru geçirilen doğrularda θ açısına bir bağlılık yoktur. Dolayısıyla bu kenarlar için

$$\begin{aligned} r_1 \approx r_3 \approx r \\ \text{alınabilir. Bu iki kenarın M noktasında oluşturdukları manyetik indüksiyon alanların toplamı} \\ \vec{B}_{13} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_1 \times \vec{r}_1}{4\pi r_1^3} + \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_3 \times \vec{r}_3}{4\pi r_3^3} \approx \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_1 \times \vec{r}_1}{4\pi r^3} - \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_1 \times \vec{r}_3}{4\pi r^3} = \\ = \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \ell^2}{4\pi r^3} \vec{k} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} \end{aligned}$$

olur. Bu iki manyetik indüksiyon alanının toplamı z eksenini boyuncadır. Çerçevenin 2. ve 4. No'lu kenarlardan M noktasına kadar olan uzaklıklarda θ açısına bağlı farklılıklar meydana gelir. Bu uzaklıklar için

$$r_2 \approx r - \frac{\ell \cos \alpha}{2} = r - \frac{\ell \sin \theta}{2}; r_4 \approx r + \frac{\ell \cos \alpha}{2} = r + \frac{\ell \sin \theta}{2}$$

yazabiliriz. Bu iki kenarın oluşturdukları manyetik indüksiyon alanlarının toplamı

$$\begin{aligned} \vec{B}_{24} = \vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{r}_2}{4\pi r_2^3} + \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_4 \times \vec{r}_4}{4\pi r_4^3} \approx \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{r}_2}{4\pi \left(r - \frac{\ell \sin \theta}{2}\right)^3} - \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{r}_4}{4\pi \left(r + \frac{\ell \sin \theta}{2}\right)^3} \approx \\ \approx \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{r}_2}{4\pi r^3 \left(1 - \frac{3\ell \sin \theta}{2r}\right)} - \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{r}_4}{4\pi r^3 \left(1 + \frac{3\ell \sin \theta}{2r}\right)} \approx \\ \approx \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{r}_2}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{3\ell \sin \theta}{2r}\right) - \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{r}_4}{4\pi r^3} \left(1 - \frac{3\ell \sin \theta}{2r}\right) = \\ = \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_4)}{4\pi r^3} + \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 + \vec{r}_4)}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{3\ell \sin \theta}{r}\right) \approx \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times \vec{\ell}_3}{4\pi r^3} + \frac{\mu_0 I \vec{\ell}_2 \times 2\vec{r}}{4\pi r^3} \frac{3\ell \sin \theta}{2r} = \\ = \frac{\mu_0 I \ell^2}{4\pi r^3} \vec{k} + \frac{3\mu_0 I \ell \sin \theta}{4\pi r^4} (\vec{\ell}_2 \times \vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} \vec{k} + \frac{3\mu_0 I \ell \sin \theta}{4\pi r^4} (\vec{\ell}_2 \times \vec{r}) = \\ = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} \vec{k} + \frac{3\mu_0 I \ell \sin \theta}{4\pi r^4} \ell r \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} \vec{k} + \frac{3\mu_0 I \ell^2 \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \vec{p}_m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

olur. Toplam bileşke manyetik indüksiyon alanı

$$\vec{B} = \vec{B}_{13} + \vec{B}_{24} = 2 \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \vec{p}_m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

olarak bulunur. \vec{k} birim vektör ve \vec{e}_r ile \vec{e}_θ birim vektörleri için

$$\vec{k} = \cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta; \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta \cdot \vec{e}_r - \vec{k}$$

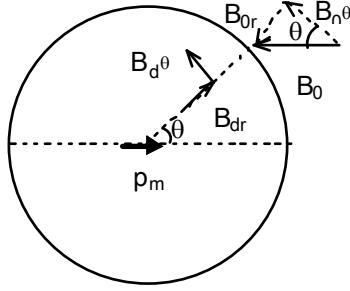
yazabiliriz. Buradan

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \vec{p}_m (\cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \vec{p}_m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta = \frac{2\mu_0 \vec{p}_m \cos \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 \vec{p}_m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

ya da

$$\begin{aligned} \vec{B} &= 2 \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} (\cos \theta \cdot \vec{e}_r - \vec{k}) = \frac{2\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} (\cos \theta \cdot \vec{e}_r - \vec{k}) = \\ &= \frac{2\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} - \frac{3\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \vec{p}_m r \cos \theta}{4\pi r^4} \vec{e}_r = \frac{3\mu_0 (\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{e}_r}{4\pi r^4} - \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} = \frac{3\mu_0 (\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{r}}{4\pi r^5} - \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3} = \\ &= \frac{3\mu_0 (\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{r}}{4\pi r^5} - \frac{\mu_0 \vec{p}_m (\vec{r} \cdot \vec{r})}{4\pi r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{r} - \vec{p}_m (\vec{r} \cdot \vec{r})] \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Bulunan bileşenlerin ifadelerini süperiletkenlerde gözlenen ve süperiletken maddelerin dış manyetik indüksiyon alanında belli değere kadar manyetik indüksiyon alanını maddenin dışına itilme olayını açıklayabiliriz. Manyetik indüksiyon alanı belli kritik değeri aştığında ise bu süperiletken maddeler süperiletken özelliğini kaybetmektedir. Süperiletken madde içinde uygulanan dış manyetik indüksiyon alanın girememesi süperiletken maddenin yüzeyinde akan akımlar ile modellenilebilir. Bu akımlar ise bir manyetik dipol oluşturmaktadır. Akan akımlar bir

manyetik dipol oluşturursa manyetik dipolün manyetik indüksiyon alanı uygulanan dış manyetik indüksiyon alanının süperiletken küreden dışarıya itmektir. Manyetik dipol momentinin oluşturduğu manyetik indüksiyon alanı

$$B_d = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

olarak verilir. Radyal ve teğetsel yönde bileşenleri küre üzerindeki bir nokta için

$$B_{dr} = \frac{2\mu_0 n_m \cos\theta}{4\pi r^3}; B_{d\theta} = \frac{\mu_0 n_m \sin\theta}{4\pi r^3}$$

olarak yazılabilir. Dışarıdaki manyetik indüksiyon alanın bileşenleri

$$B_r = B \cos\theta; B_{\theta} = B \sin\theta$$

olur. Süperiletken topun özelliği manyetik indüksiyon alanının yüzeye normal bileşenin sıfır olduğundan oluşan manyetik dipolün manyetik dipol momenti

$$B_r = B_{dr}, \frac{2\mu_0 n_m \cos\theta}{4\pi r^3} = B \cos\theta; B = \frac{2\mu_0 n_m}{4\pi r^3}; p_m = \frac{2\pi r^3 B}{\mu_0}$$

olarak bulunur.

Bir manyetik dipol manyetik alana belli hız ile atılırsa manyetik alandan yansıyabilir. Yansıma şartını bulmak için gradienti olan manyetik indüksiyon alanlarda manyetik dipollere etki eden kuvvet ve yapılan işi bulmalıyız. Etki eden kuvvet

$$F = p_m \frac{dB}{dx}$$

bu kuvvetin dx yolunda yaptığı iş

$$dA = F dx = p_m dB$$

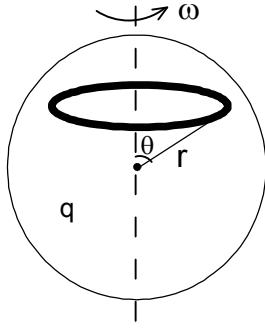
tüm iş kinetik enerjiye eşit ise

$$A = K = \frac{mv^2}{2} = \int_0^B \frac{2\pi r^3 B dB}{\mu_0} = \frac{\pi r^3 B^2}{\mu_0}$$

yansıma gerçekleşir. Buradan manyetik dipolün yansıması için şart

$$v \leq \sqrt{\frac{2\pi r^3 B^2}{m\mu_0}} = \sqrt{\frac{2\pi r^3 B^2}{\mu_0 \frac{4\pi \rho r^3}{3}}} = \sqrt{\frac{3B^2}{2\mu_0 \rho}}$$

olarak bulunur.



Manyetik dipolün oluşturduğu alan ile çok ilginç bir değerlendirme yapılabilir. Son verilere göre yapılan deneylerde elektronun yükü q_e ve protonun yükü q_p arasındaki fark $\frac{q_p - q_e}{q_p} \leq 10^{-21}$ olarak ölçülmüştür.

Diğer taraftan ise dünyanın manyetik alanının doğası ile ortaya konulan çok net bir model yoktur. Yerin manyetik indüksiyon alanı $B \approx 3 \cdot 10^{-5}$ T deneysel olarak bilinmektedir. Elektronlar ile protonlar arasındaki yüklerin arasında varsayılan yük farkı dünyanın manyetik alanın açıklaması mümkün olup olmadığı irdeleyebiliriz. Bunun için dünyada bulunan atomların atom kütlelerinin proton sayısına oranını $A/Z \approx 2$

kabul edebiliriz. Dünyanın yarıçapı 6378 km, kütlesi $m_D = 6 \cdot 10^{24}$ kg, bir nükleonun kütlesi $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg ve yükü $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C sayısal olarak da değerlendirme için gerekli olan bilgilerdir. Proton ve elektronun yüklerin muhtemel farklılığından kaynaklanan dünyanın toplam yükü q olsun. Bu yük sadece ve sadece yüklü parçacıkların yük farkından kaynaklanabilir. Tüm parçacık sayısı

$$N = \frac{M}{m} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 3,59 \cdot 10^{51}$$

proton sayısı

$$N_p = \frac{N}{2} = 1,796 \cdot 10^{51}$$

ve teşkil ettikleri yük farkı

$$q = N_p \Delta q = 1,796 \cdot 10^{51} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,874 \cdot 10^{11} \text{ C}$$

olur. $r < R$ yarıçapında ve dr kalınlıkta küresel bir kabuk seçelim. Bu kabukta yarıçapı $r \sin \theta$ bir halka seçelim. Bu halkanın hacmi

$$dV = 2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta \cdot dr$$

olur. Bu halkanın içindeki yük

$$dq = \frac{q dV}{V} = \frac{2\pi q r^2 \sin \theta dr d\theta}{V}$$

olur. Dönme sonucu seçilen halkanın oluşturduğu elektrik akım

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{q \omega r^2 \sin \theta dr d\theta}{V}$$

bu akımın oluşturduğu manyetik dipol momentini

$$dp_m = dIS = \frac{q \omega r^2 \sin \theta dr d\theta}{V} \pi (r \sin \theta)^2 = \frac{q \omega \pi r^4 \sin^3 \theta dr d\theta}{V}$$

olur. Tüm kürenin dipol momentini

$$p_m = \int_0^R \int_0^\pi \frac{q \omega \pi r^4 \sin^3 \theta dr d\theta}{V} = \frac{q \omega R^2}{5} = \frac{2\pi q R^2}{5T}$$

olarak bulunur. Bu manyetik dipol momentinin oluşturduğu manyetik indüksiyon alanı

$$B = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi R^3} = \frac{4\mu_0 \pi q}{4\pi \cdot 5RT} = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 3,14 \cdot 2,874 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 6378 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 3600} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi sonuç iki merteye olarak daha küçüktür. Verilen farkı yerin manyetik indüksiyon alanının kaynağı olarak göstermek mümkün değildir.

Manyetik dipollerle ilgili bir çok uygulama yapılabilir. Gösterilen yöntemler eğitimde öğrencilere belli ölçüde kolaylık ve aynı zamanda model kurma, matematiksel değerlendirme yapmaya yöneliktir. Yine de unutulmaması gereken öğrencilerin mutlaka yüksek matematik bilgisi sahibi olmaları gerçeğidir.